Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer

Autor: Andre Fischer

Übung VII, Aufgabe 1.d)
Wie lauten die Komponenten ψ_{ij} einer Wellenfunktion

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} \psi_{ij} \, |\phi_i \otimes \chi_j\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{1}$$

in der Basis $|U_n \otimes V_n\rangle$?
Die Schmidt-Basis ist definiert durch

$$\begin{aligned} N^\dagger N \, |V_n\rangle &= \lambda_n^2 \, |V_n\rangle & (2) \\ |\lambda_n|^{-1} N \, |V_n\rangle &= |U_n\rangle \quad \text{für } \lambda_n > 0 \, . & (3) \end{aligned}$$

Da wir in der glücklichen Lage sind zu wissen, dass

$$\begin{aligned} \psi_{mn} &= \langle U_m \otimes V_n | \Psi \rangle & (4) \\ &= |\lambda_n| \delta_{mn} & (5) \end{aligned}$$

herauskommen sollte, können wir die umgekehrte Frage stellen: Wie hat N auszusehen, damit sich dieses Ergebnis einstellt. Über die Rechnung

$$\begin{aligned} \langle U_m \otimes V_n | \psi \rangle &= \sum_{i,j} \langle U_m | \phi_i \rangle \, \psi_{ij} \, \langle V_n | \chi_j \rangle & (6) \\ &= \langle V_m | \, |\lambda_m|^{-1} N^\dagger \underbrace{\sum_{i,j} |\phi_i\rangle \, \psi_{ij} \, \langle V_n | \chi_j \rangle}_{\equiv N|V_n\rangle} & (7) \\ &= |\lambda_m|^{-1} \, \langle V_m | \, N^\dagger N \, |V_n\rangle & (8) \\ &= |\lambda_n| \delta_{mn} \, . & (9) \end{aligned}$$

erhält man nur die gewünschte Vereinfachung, wenn man N wie in der zweiten Zeile der obigen Rechnung definiert. In meiner eigenen Schreibweise ist dies

$$N = \sum_{i,j} |\phi_i\rangle \, \psi_{ij} \overline{\langle \chi_j |} \tag{10}$$

wobei $\overline{\langle \chi_j |}$ wie folgt wirkt

$$\overline{\langle \chi_j |} \alpha \rangle = \langle \alpha | \chi_i \rangle \ . \tag{11}$$

Zum Vergleich, die Definition auf dem Übungszettel war

$$N = \sum_{i,j} |\phi_i\rangle \, \psi_{ij} \, \langle \chi_j | \ . \tag{12}$$